

Ejercicios sobre Funciones Inyectivas, Dominio y Rango

1. **Definición básica:** Determine si cada una de las siguientes relaciones es una función. Justifique su respuesta.

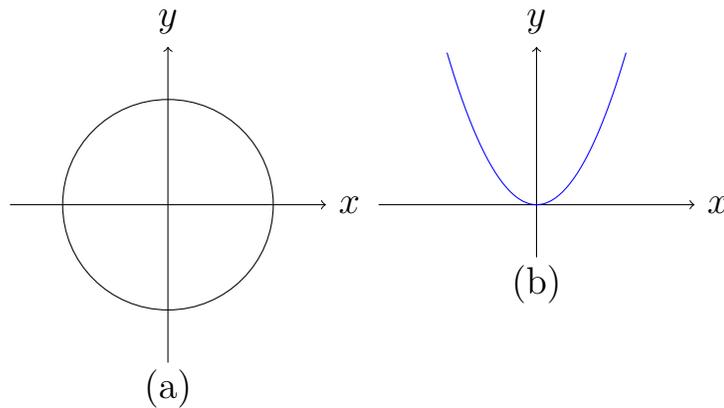
(a) $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

(b) $R_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$

(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$

2. **Test de la recta vertical:** Para cada una de las siguientes gráficas, determine si representa una función. Explique su razonamiento utilizando el test de la recta vertical.



3. **Dominio algebraico:** Encuentre el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

(b) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$

(c) $h(x) = \sqrt{x + 3} + \sqrt{5 - x}$

(d) $k(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 16}}$

4. **Rango de funciones lineales:** Determine el rango de las siguientes funciones lineales:

(a) $f(x) = 2x + 3$, con dominio $[-2, 4]$

- (b) $g(x) = -3x + 1$, con dominio \mathbb{R}
- (c) $h(x) = 5$, con dominio \mathbb{R}
- (d) $k(x) = \frac{1}{2}x - 4$, con dominio $[0, \infty)$

5. **Funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Grafique la función $f(x)$
- (b) Determine el dominio y rango de $f(x)$

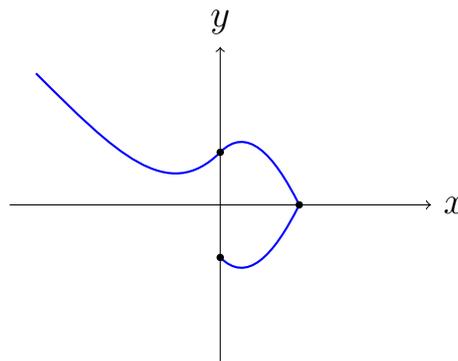
6. **Funciones cuadráticas:** Para la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$:

- (a) Encuentre el vértice y la dirección de apertura (arriba o abajo)
- (b) Determine el dominio y rango de f

7. **Funciones racionales:** Para la función $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$:

- (a) Determine el dominio de f
- (b) Determine el rango de f (sugerencia: despeje x en términos de y)

8. **Análisis gráfico:** La siguiente gráfica muestra una relación entre x y y :



Gráfica de la relación

- (a) ¿Esta relación es una función? Explique por qué sí o por qué no
- (b) Si no es una función, ¿cómo modificaría el dominio para que sí lo sea?

9. **Funciones trigonométricas:** Para la función $f(x) = \sin(x)$:

- (a) ¿Cuál es el dominio y rango de f ?

(b) ¿Es f una función inyectiva en su dominio completo? Justifique

10. **Funciones con valor absoluto:** Considere la función $f(x) = |x^2 - 4|$.

(a) Grafique la función $f(x)$

(b) Determine el dominio y rango de f

11. **Dominio en contextos aplicados:** La población P de una especie de peces en un lago sigue el modelo $P(t) = \frac{5000}{1 + 4e^{-0.2t}}$, donde t es el tiempo en años.

(a) ¿Cuál es el dominio físico de esta función?

(b) ¿Cuál es el rango físico de esta función?

12. **Dominio y rango de funciones inversas:** Si $f(x) = \sqrt{4 - x}$:

(a) Determine el dominio y rango de f

13. **Funciones en diferentes representaciones:** Se tiene la siguiente tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3

(a) ¿Esta tabla representa una función? Justifique su respuesta

(b) ¿Es la función inyectiva? Explique por qué

(c) Proponga una fórmula algebraica que podría generar estos valores

(d) ¿Cuál sería el dominio y rango si consideramos la función definida para todos los números reales?

14. **Problema de aplicación:** Un tanque cilíndrico de 2 metros de radio y 5 metros de altura se está llenando con agua a una tasa constante de $0.5 \text{ m}^3/\text{min}$.

(a) Encuentre una función $h(V)$ que represente la altura del agua en el tanque en términos del volumen V

(b) Determine el dominio y rango de $h(V)$