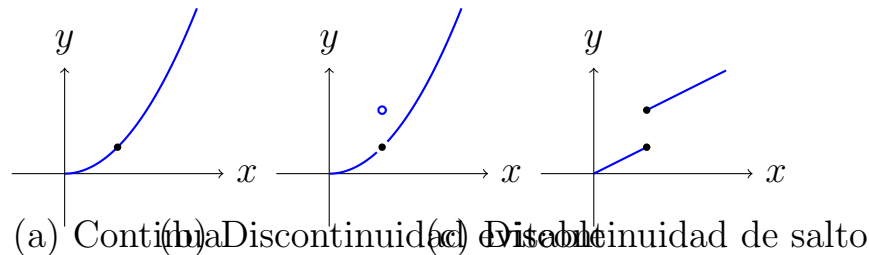


Taller 10: ejercicios sobre Definición de Continuidad

- Definición básica:** Determine si la función $f(x) = 3x - 2$ es continua en $x = 2$.
 - Verifique que $f(2)$ está definida
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 - Verifique que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$
 - Grafique la función e identifique el punto en cuestión
- Definición formal:** Demuestre formalmente que $f(x) = x^2$ es continua en $x = 1$.
 - Use la definición épsilon-delta de continuidad
 - Encuentre una expresión para δ en términos de ε
 - Complete la demostración formal
 - Ilustre gráficamente la relación entre ε y δ
- Ilustración gráfica:** Las siguientes gráficas muestran tres funciones cerca de $x = a$.



- Identifique los tres tipos de comportamiento en las gráficas
 - Para cada gráfica, verifique cuál de las tres condiciones de continuidad falla
 - ¿Qué tipo de discontinuidad tiene cada función en $x = a$?
- Continuidad en un punto:** Determine si la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$. Justifique su respuesta usando la definición formal.

5. **Tipos de discontinuidades:** Para cada función, identifique el tipo de discontinuidad en el punto indicado:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ en $x = 3$

(c) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$

(d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$

6. **Continuidad de funciones polinómicas:** Demuestre que cualquier función polinómica $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en todos los números reales.

(a) Use las propiedades de los límites

(b) Comience con funciones constantes y $f(x) = x$

(c) Use inducción matemática para funciones de grado n

(d) ¿Cómo se relaciona esto con el "rule of four" mencionado en el libro de Finney?

7. **Continuidad de funciones racionales:** Determine el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

(b) $g(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$

(c) $h(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x}$

(d) $k(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

8. **Continuidad de funciones trigonométricas:** Demuestre que $f(x) = \sin(x)$ es continua en todos los números reales.

(a) Use la identidad $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

(b) Demuestre que $\lim_{h \rightarrow 0} [\sin(a+h) - \sin(a)] = 0$

(c) Complete la demostración de continuidad

(d) ¿Cómo se relaciona esto con la continuidad de $\cos(x)$?

9. **Continuidad de funciones compuestas:** Si f es continua en b y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$.
- (a) Use este resultado para demostrar que si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \sin(x^2 - 3)$
 - (c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos(x)}$
 - (d) ¿Por qué es importante la continuidad en este teorema?

10. **Continuidad y límites laterales:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 - (c) ¿Es f continua en $x = 2$? Justifique
 - (d) ¿Cómo se relaciona esto con la definición de continuidad?
11. **Continuidad de funciones definidas por partes:** Determine los valores de k que hacen continua a la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ en términos de k
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 - (c) Determine k para que f sea continua en $x = 2$
 - (d) Grafique la función para el valor encontrado de k
12. **Continuidad de funciones con valor absoluto:** Analice la continuidad de la función $f(x) = |x - 2| + 1$ en $x = 2$.
- (a) Escriba $f(x)$ como una función definida por partes
 - (b) Calcule los límites laterales en $x = 2$
 - (c) Verifique si $f(2)$ está definida
 - (d) ¿Es f continua en $x = 2$? Justifique
13. **Continuidad y operaciones:** Demuestre que si f y g son continuas en $x = a$, entonces:

- (a) $f + g$ es continua en $x = a$
- (b) $f \cdot g$ es continua en $x = a$
- (c) $\frac{f}{g}$ es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$
- (d) $|f|$ es continua en $x = a$

14. **Continuidad y composición:** Determine si las siguientes funciones son continuas en todos los números reales:

- (a) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
- (b) $g(x) = e^{\cos(x)}$
- (c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
- (d) $k(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$

15. **Continuidad y el teorema del valor intermedio:** Demuestre que la ecuación $e^x = 4 - x^2$ tiene al menos una solución real.

- (a) Defina una función apropiada $f(x)$
- (b) Encuentre un intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos
- (c) Aplique el teorema del valor intermedio
- (d) Use métodos numéricos para aproximar la solución

16. **Continuidad y aplicaciones:** La temperatura T (en grados Celsius) de un objeto en enfriamiento sigue el modelo $T(t) = 20 + 60e^{-0.1t}$, donde t es el tiempo en minutos.

- (a) ¿Es $T(t)$ continua para $t \geq 0$? Justifique
- (b) Use el teorema del valor intermedio para demostrar que el objeto alcanza una temperatura de 50°C
- (c) ¿En qué momento aproximadamente ocurre esto?
- (d) ¿Por qué es importante la continuidad en este contexto físico?