

Taller 11: ejercicios sobre Propiedades Algebraicas de la Continuidad

1. **Suma de funciones continuas:** Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin(x)$ son continuas en todos los números reales, demuestre que $h(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sin(x)$ es continua en $x = 0$.
 - (a) Verifique que $h(0)$ está definida
 - (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ usando las propiedades de los límites
 - (c) Verifique que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$
 - (d) Grafique $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ cerca de $x = 0$
2. **Producto de funciones continuas:** Demuestre que $h(x) = x^2 \cos(x)$ es continua en todos los números reales.
 - (a) Identifique $f(x)$ y $g(x)$ tales que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
 - (b) Justifique por qué f y g son continuas en todos los reales
 - (c) Use la propiedad del producto para concluir que h es continua
 - (d) ¿Cómo se relaciona esto con el "rule of four" mencionado en el libro de Finney?
3. **Cociente de funciones continuas:** Determine el dominio de continuidad de la función $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.
 - (a) Identifique $f(x)$ y $g(x)$ tales que $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
 - (b) Verifique que f y g son continuas en todos los reales
 - (c) Determine dónde $g(x) = 0$
 - (d) Exprese el dominio de continuidad de $h(x)$
4. **Continuidad de funciones racionales:** Determine el dominio de continuidad de las siguientes funciones:
 - (a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$
 - (b) $g(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$

$$(c) \ h(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x}$$

$$(d) \ k(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

5. **Continuidad de funciones trigonométricas:** Use las propiedades algebraicas de la continuidad para demostrar que $f(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$ es continua en todos los números reales.

(a) Recuerde que $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son continuas en todos los reales

(b) Use las propiedades del producto y la suma

(c) Justifique cada paso usando las propiedades algebraicas

(d) ¿Cómo se relaciona esto con la identidad trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$?

6. **Continuidad de funciones exponenciales y logarítmicas:** Determine el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

$$(a) \ f(x) = e^{x^2 - 3x + 2}$$

$$(b) \ g(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$(c) \ h(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$$

$$(d) \ k(x) = \log_2(|x| + 1)$$

7. **Funciones definidas por partes:** Determine los valores de k que hacen continua a la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3x + k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

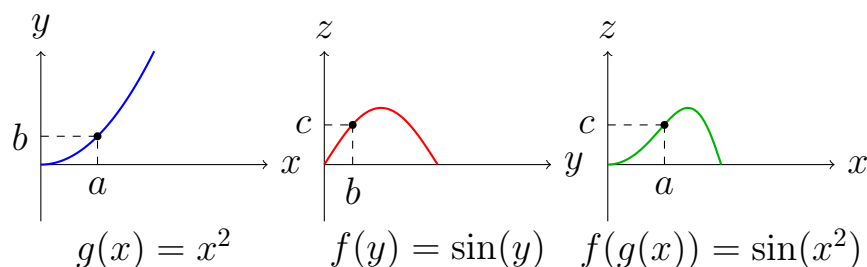
(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ en términos de k

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ en términos de k

(c) Determine k para que f sea continua en $x = 1$

(d) Grafique la función para el valor encontrado de k

8. **Ilustración de la composición:** La siguiente gráfica muestra tres funciones relacionadas: $g(x)$, $f(x)$ y $f(g(x))$.



- (a) Identifique a , b y c en las gráficas
- (b) Explique visualmente por qué $f(g(x))$ es continua si f y g lo son
- (c) ¿Qué pasaría si g tuviera una discontinuidad en $x = a$?

9. **Continuidad y operaciones:** Si f y g son continuas en $x = a$, demuestre que:

- (a) $f - g$ es continua en $x = a$
- (b) $c \cdot f$ es continua en $x = a$ para cualquier constante c
- (c) f^n es continua en $x = a$ para cualquier entero positivo n
- (d) $\sqrt[n]{f}$ es continua en $x = a$ si $f(a) > 0$ y n es par, o si n es impar

10. **Continuidad de funciones especiales:** Determine el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$
- (b) $g(x) = \frac{x}{|x|}$
- (c) $h(x) = \lfloor x \rfloor$ (función parte entera)
- (d) $k(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$

11. **Continuidad y el teorema del valor intermedio:** Demuestre que la ecuación $x^3 - 4x^2 + 2x + 2 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, 1]$.

- (a) Verifique que la función satisface las hipótesis del teorema
- (b) Evalúe la función en los extremos del intervalo
- (c) Aplique el teorema del valor intermedio
- (d) Use las propiedades algebraicas de la continuidad para justificar cada paso

12. **Aplicación en física:** La temperatura T (en grados Celsius) de un objeto en enfriamiento sigue el modelo $T(t) = 20 + 60e^{-0.1t}$, donde t es el tiempo en minutos.

- (a) ¿Es $T(t)$ continua para $t \geq 0$? Justifique usando propiedades algebraicas
- (b) Use el teorema del valor intermedio para demostrar que el objeto alcanza una temperatura de 50°C
- (c) ¿En qué momento aproximadamente ocurre esto?
- (d) ¿Por qué es importante la continuidad en este contexto físico?