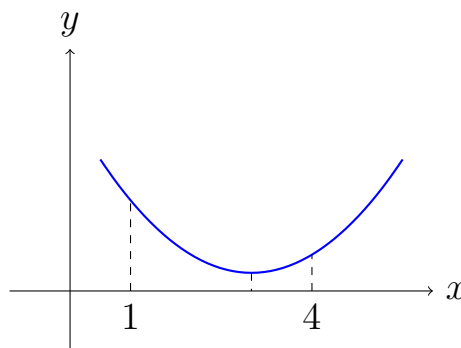


Taller 12: ejercicios sobre Teoremas de la Continuidad: Bolzano, Valor Intermedio, Valor Extremo y Método de la Bisección

1. **Teorema de Bolzano básico:** Demuestre que la ecuación $x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0, 1]$.
 - (a) Verifique que la función $f(x) = x^3 - 4x + 1$ es continua en $[0, 1]$
 - (b) Evalúe $f(0)$ y $f(1)$
 - (c) Aplique el teorema de Bolzano para concluir
 - (d) Grafique la función en el intervalo y marque la solución
2. **Teorema del Valor Intermedio básico:** Demuestre que la ecuación $x^5 + 2x^3 - 4x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[1, 2]$.
 - (a) Verifique que la función es continua en $[1, 2]$
 - (b) Evalúe la función en los extremos del intervalo
 - (c) Aplique el teorema del valor intermedio
 - (d) Use el método de bisección para aproximar la solución con dos decimales
3. **Demostración formal del teorema de Bolzano:** Demuestre el teorema de Bolzano: Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
 - (a) Defina el conjunto $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$
 - (b) Demuestre que S es no vacío y acotado superiormente
 - (c) Sea $c = \sup(S)$, demuestre que $f(c) = 0$
 - (d) Explique por qué este método de demostración es válido
4. **Método de la bisección:** Use el método de la bisección para aproximar la solución de $x^3 - 2x - 5 = 0$ en el intervalo $[2, 3]$ con un error menor que 0.01.
 - (a) Realice tres iteraciones del método
 - (b) Calcule el error en cada iteración
 - (c) Determine cuántas iteraciones se necesitan para alcanzar el error deseado
 - (d) Compare con la solución exacta (si es posible)

5. **Teorema del Valor Extremo:** Considere la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en el intervalo $[-1, 3]$.
- (a) Verifique que f es continua en $[-1, 3]$
 - (b) Encuentre los valores críticos de f en $(-1, 3)$
 - (c) Evalúe f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo
 - (d) Identifique el valor máximo y mínimo absoluto
6. **Ilustración del teorema del valor extremo:** La siguiente gráfica muestra una función continua $f(x) = 0.3x^2 - 1.8x + 3$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$.



- (a) Identifique el valor máximo absoluto y dónde se alcanza
 - (b) Identifique el valor mínimo absoluto y dónde se alcanza
 - (c) ¿Por qué hay dos puntos donde se alcanza el valor máximo?
 - (d) ¿Qué pasaría si el intervalo fuera abierto $(1, 4)$?
7. **Aplicación del teorema del valor intermedio:** Demuestre que la ecuación $\cos(x) = x$ tiene al menos una solución.
- (a) Defina una función apropiada $f(x)$
 - (b) Encuentre un intervalo $[a, b]$ donde se cumplan las condiciones del teorema
 - (c) Aplique el teorema del valor intermedio
 - (d) Use métodos numéricos para aproximar la solución
8. **Teorema del valor intermedio y funciones trigonométricas:** Demuestre que para cualquier número real k con $|k| \leq 1$, la ecuación $\sin(x) = k$ tiene al menos una solución.
- (a) Use el teorema del valor intermedio en un intervalo adecuado
 - (b) ¿Por qué el intervalo $[0, \pi]$ es apropiado para $k \geq 0$?
 - (c) ¿Qué intervalo usaría para $k < 0$?
 - (d) ¿Cómo se relaciona esto con la definición de $\sin^{-1}(x)$?

9. **Teorema de Bolzano y continuidad:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 3 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- (a) ¿Es f continua en $[0, 2]$?
- (b) Evalúe $f(0)$ y $f(2)$
- (c) ¿Se cumple $f(0) \cdot f(2) < 0$?
- (d) ¿Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$? Justifique

10. **Método de la bisección y convergencia:** Sea $f(x) = x^2 - 2$ y considere el intervalo inicial $[1, 2]$ para encontrar $\sqrt{2}$.

- (a) Realice 5 iteraciones del método de bisección
- (b) Calcule el error absoluto en cada iteración
- (c) Demuestre que el error después de n iteraciones es menor que $\frac{1}{2^n}$
- (d) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener 6 decimales correctos?

11. **Teorema del valor extremo y funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- (a) ¿Es f continua en $[-2, 2]$?
- (b) ¿Se aplica el teorema del valor extremo? Justifique
- (c) Encuentre el valor máximo y mínimo de f en $[-2, 2]$
- (d) ¿En qué puntos se alcanzan estos valores?

12. **Demostración del teorema del valor intermedio:** Demuestre el teorema del valor intermedio a partir del teorema de Bolzano.

- (a) Dada f continua en $[a, b]$ y N entre $f(a)$ y $f(b)$, defina $g(x) = f(x) - N$
- (b) Verifique que g satisface las condiciones del teorema de Bolzano
- (c) Concluya que existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$
- (d) Explique por qué esto implica que $f(c) = N$

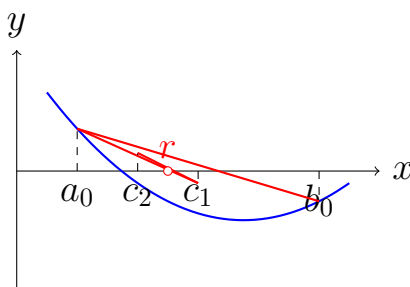
13. **Teorema del valor intermedio y aplicaciones prácticas:** La temperatura T (en grados Celsius) de un objeto en enfriamiento sigue el modelo $T(t) = 20 + 60e^{-0.1t}$, donde t es el tiempo en minutos.

- (a) ¿Es $T(t)$ continua para $t \geq 0$? Justifique
- (b) Use el teorema del valor intermedio para demostrar que el objeto alcanza una temperatura de 50°C
- (c) ¿En qué momento aproximadamente ocurre esto?
- (d) ¿Por qué es importante la continuidad en este contexto físico?

14. **Teorema de Bolzano y funciones polinómicas:** Demuestre que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

- (a) Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con n impar y $a_n \neq 0$
- (b) Analice el comportamiento de $p(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$
- (c) Use el teorema de Bolzano para concluir
- (d) ¿Por qué este resultado no se cumple para polinomios de grado par?

15. **Ilustración del método de la bisección:** La siguiente gráfica muestra una función $f(x)$ y las primeras iteraciones del método de la bisección.



- (a) Identifique a_0 , b_0 y c_1 en la gráfica
- (b) ¿Por qué se elige el subintervalo $[a_0, c_1]$ para la siguiente iteración?
- (c) ¿Cómo se reduce el error en cada iteración?
- (d) ¿Qué propiedad de f garantiza que el método converja?

16. **Teorema del valor extremo y funciones trigonométricas:** Considere la función $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

- (a) Verifique que f es continua en $[0, \pi]$
- (b) Encuentre los valores críticos de f en $(0, \pi)$
- (c) Evalúe f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo
- (d) Identifique el valor máximo y mínimo absoluto

17. **Teorema del valor intermedio y composición de funciones:** Si f es continua en $[a, b]$ y g es continua en $[c, d]$ con $f([a, b]) \subseteq [c, d]$, demuestre que $g \circ f$ satisface el teorema del valor intermedio en $[a, b]$.

- (a) Sea N entre $(g \circ f)(a)$ y $(g \circ f)(b)$
- (b) Use el teorema del valor intermedio para f
- (c) Use el teorema del valor intermedio para g
- (d) Concluya que existe $c \in (a, b)$ tal que $(g \circ f)(c) = N$

18. **Problema teórico avanzado:** Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces existe un número $m > 0$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in [a, b]$.

- (a) Use el teorema del valor extremo
- (b) Sea m el valor mínimo absoluto de f en $[a, b]$
- (c) Demuestre que $m > 0$
- (d) ¿Cómo se relaciona este resultado con el teorema del valor intermedio?

19. **Aplicación del método de la bisección:** La población P de una especie en un hábitat sigue el modelo $P(t) = 1000e^{0.2t} - 500t^2$, donde t es el tiempo en años.

- (a) Use el método de la bisección para encontrar cuándo la población será de 2000 individuos (use el intervalo $[2, 3]$)
- (b) Realice 4 iteraciones y calcule la aproximación final
- (c) Estime el error en su aproximación
- (d) ¿Qué significa físicamente el resultado obtenido?