

Taller 13: ejercicios sobre Definición de Derivada

- Definición básica:** Use la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ si $f(x) = 3x - 2$.
 - Escriba la definición formal de la derivada
 - Calcule $f(x + h)$
 - Forme y simplifique el cociente diferencial $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
 - Calcule el límite cuando $h \rightarrow 0$
- Definición alternativa:** Use la definición alternativa $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para encontrar la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 2$.
 - Escriba el límite correspondiente
 - Simplifique la expresión
 - Calcule el límite
 - Verifique su resultado usando la definición estándar
- Derivada de una función cuadrática:** Use la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ si $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
 - Calcule $f(x + h)$
 - Forme y simplifique el cociente diferencial
 - Calcule el límite cuando $h \rightarrow 0$
 - Evalúe $f'(2)$ y verifique con la gráfica
- Derivada de una función racional:** Use la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
 - Forme el cociente diferencial
 - Simplifique la expresión
 - Calcule el límite cuando $h \rightarrow 0$
 - ¿Por qué la derivada no existe en $x = 0$?

5. **Velocidad instantánea:** La posición de un objeto en movimiento está dada por $s(t) = t^2 + 2t$, donde s está en metros y t en segundos.
- Use la definición de derivada para encontrar la velocidad instantánea en $t = 3$
 - Interprete el resultado físicamente
 - Compare con la velocidad promedio en el intervalo $[3, 3.1]$
 - ¿Cómo se relaciona esto con el "rule of four" mencionado en el libro de Finney?
6. **Derivada en un punto específico:** Use la definición de derivada para encontrar $f'(1)$ si $f(x) = x^3$.
- Use la definición $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 - Factorice $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para simplificar
 - Calcule el límite
 - Verifique con la fórmula de la derivada de x^n
7. **No existencia de la derivada:** Demuestre que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.
- Calcule el límite por la izquierda $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$
 - Calcule el límite por la derecha $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$
 - ¿Por qué estos límites son diferentes?
 - Grafique la función e identifique el punto de no derivabilidad
8. **Relación entre continuidad y derivabilidad:** Considere la función:
- $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
- Demuestre que f es continua en $x = 0$
 - Use la definición para determinar si f es derivable en $x = 0$
 - ¿Es f' continua en $x = 0$? Justifique
 - ¿Qué ilustra este ejemplo sobre la relación entre continuidad y derivabilidad?
9. **Derivada de una función trigonométrica:** Use la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \sin(x)$.
- Use la identidad $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
 - Forme y simplifique el cociente diferencial

- (c) Use los límites trigonométricos fundamentales
- (d) Complete el cálculo de la derivada

10. **Derivada y límites laterales:** Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

- (a) Use la definición para encontrar $f'(x)$ para $x \neq 0$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$
- (c) ¿Existe $f'(0)$? Justifique usando la definición
- (d) Grafique $f(x)$ y $f'(x)$ en el mismo sistema de coordenadas

11. **Derivada de una función definida por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) ¿Es f continua en $x = 1$? Justifique
- (b) Use la definición para determinar si f es derivable en $x = 1$
- (c) Calcule $f'(x)$ para $x < 1$ y para $x > 1$
- (d) Grafique $f(x)$ y $f'(x)$

12. **Derivada y simetría:** Demuestre que si f es una función par (es decir, $f(-x) = f(x)$ para todo x), entonces f' es una función impar.

- (a) Use la definición de derivada
- (b) Calcule $f'(-x)$ y relacione con $f'(x)$
- (c) Complete la demostración
- (d) Proporcione un ejemplo de una función par y su derivada

13. **Problema teórico avanzado:** Demuestre que si f es derivable en $x = a$, entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

- (a) Sume y reste $f(a)$ en el numerador
- (b) Use propiedades de los límites
- (c) Complete la demostración
- (d) ¿Por qué este límite es útil en métodos numéricos para calcular derivadas?