

Taller 14: ejercicios sobre reglas de la derivación

1. **Regla de la potencia:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^5$

(b) $g(x) = \frac{1}{x^3}$

(c) $h(x) = \sqrt[4]{x^3}$

(d) $k(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

(a) Use la regla de la potencia $f'(x) = nx^{n-1}$

(b) Exprese cada función en forma de potencia x^n antes de derivar

(c) Verifique sus resultados con la definición de derivada para al menos una función

(d) ¿Cómo se relaciona esto con el "rule of four" mencionado en el libro de Finney?

2. **Regla de la suma y resta:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$

(b) $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1$

(c) $h(x) = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + 5$

(d) $k(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 4$

(a) Aplique la regla de la suma y resta de derivadas

(b) Verifique que $\frac{d}{dx}[af(x) + bg(x)] = af'(x) + bg'(x)$

(c) ¿Por qué esta propiedad es importante para derivar polinomios?

(d) Grafique una de las funciones y su derivada en el mismo sistema

3. **Regla del producto:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$

(b) $g(x) = (2x + 3)\sin(x)$

(c) $h(x) = e^x \ln(x)$

(d) $k(x) = \sqrt{x}(x^2 - 4)$

(a) Use la regla del producto: $(fg)' = f'g + fg'$

(b) Verifique su resultado expandiendo primero el producto en el caso (a)

(c) ¿Por qué no se puede aplicar la regla del producto si las funciones no son derivables?

(d) Compare con la derivada de la suma de las mismas funciones

4. **Regla del cociente:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

(c) $h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

(d) $k(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

(a) Use la regla del cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

(b) Verifique su resultado usando la regla del producto y la regla de la cadena

(c) ¿Por qué es necesario que $g(x) \neq 0$ para aplicar esta regla?

(d) Identifique las asíntotas verticales de cada función y relacione con la derivada

5. **Regla de la cadena:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones compuestas:

(a) $f(x) = (2x + 3)^5$

(b) $g(x) = \sin(x^2 + 1)$

6. **Combinación de reglas:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones que requieren múltiples reglas:

(a) $f(x) = \frac{(x^2 + 1) \sin(x)}{e^x}$

(b) $g(x) = \sqrt{x^2 + \ln(x)}$

(c) $h(x) = e^{x \cos(x)}$

(a) Determine qué reglas necesita aplicar y en qué orden

(b) Simplifique la expresión antes de derivar cuando sea posible

(c) Verifique su resultado con un software de cálculo simbólico

(d) ¿Cuál es la estrategia más eficiente para derivar estas funciones?

7. **Derivadas de funciones trigonométricas:** Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin(3x)$

(b) $g(x) = \cos^2(x)$

(c) $h(x) = \tan(\sqrt{x})$

(d) $k(x) = \sec(x) \cdot \csc(x)$

8. **Aplicación en física:** La posición de un objeto en movimiento está dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$, donde s está en metros y t en segundos.

(a) Encuentre la velocidad $v(t) = s'(t)$ y la aceleración $a(t) = v'(t) = s''(t)$

(b) ¿En qué momentos el objeto está en reposo?

(c) ¿Cuándo el objeto se está moviendo hacia adelante y cuándo hacia atrás?

(d) ¿Cuándo la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo? ¿Qué significa físicamente?

9. **Derivadas y funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en $x = 1$? Justifique

(b) Encuentre $f'(x)$ para $x < 1$ y para $x > 1$

(c) ¿Es f derivable en $x = 1$? Justifique usando límites

(d) Grafique $f(x)$ y $f'(x)$ en el mismo sistema de coordenadas

10. **Aplicación en economía:** El costo total $C(x)$ de producir x unidades de un producto está dado por $C(x) = 1000 + 50x - 0.01x^2$.

(a) Encuentre el costo marginal $C'(x)$

(b) Calcule el costo marginal cuando $x = 100$

(c) Compare el costo marginal con el costo real de producir la unidad 101

(d) ¿Qué significa el costo marginal en términos económicos?