

Taller 2:Ejercicios sobre Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

1. **Definición básica:** Determine si cada una de las siguientes funciones es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Justifique su respuesta.

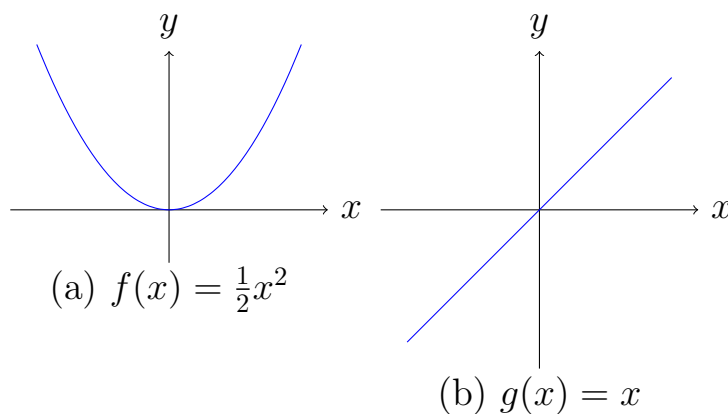
(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), g(x) = x^2$

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^3$

(d) $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k(n) = n + 1$

2. **Test de la recta horizontal:** Para cada una de las siguientes gráficas, determine si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Justifique su respuesta.



3. **Demostración algebraica de inyectividad:** Demuestre algebraicamente que las siguientes funciones son inyectivas:

(a) $f(x) = 3x - 5, x \in \mathbb{R}$

(b) $h(x) = \sqrt{x + 2}, x \geq -2$

(c) $k(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}, x \neq 3$

4. **Demostración algebraica de sobreyectividad:** Demuestre que las siguientes funciones son sobreyectivas:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 1$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty), g(x) = x^2 + 1$

(c) $h : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), h(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

(d) $k : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, k(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$

5. **Funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Grafique la función $f(x)$

(b) Determine si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

(c) Si f no es biyectiva, ¿cómo modificaría el dominio y/o codominio para que lo sea?

6. **Funciones cuadráticas:** Para la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$:

(a) Encuentre el vértice y la dirección de apertura

(b) ¿Es f inyectiva en $\mathbb{R}$? Justifique

(c) Encuentre un intervalo donde f sea inyectiva

(d) ¿Es f sobreyectiva si el codominio es $\mathbb{R}$? ¿Y si el codominio es $[-1, \infty)$?

(e) Encuentre un dominio y codominio para que f sea biyectiva

7. **Funciones racionales:** Para la función $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$:

(a) Determine el dominio y rango de f

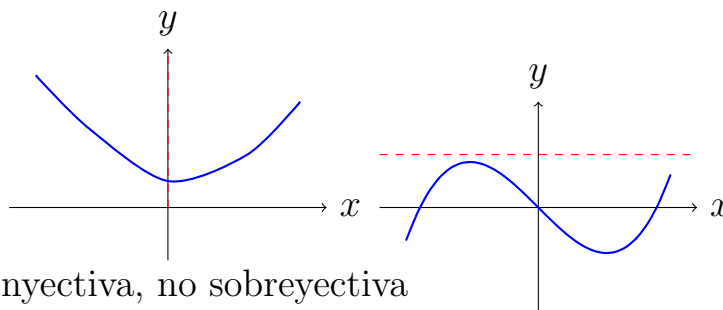
(b) ¿Es f una función inyectiva? Justifique

(c) ¿Es f una función sobreyectiva si el codominio es $\mathbb{R}$?

(d) Encuentre el codominio apropiado para que f sea sobreyectiva

(e) ¿Es f biyectiva con el dominio y codominio adecuados? Justifique

8. **Análisis gráfico:** Las siguientes gráficas muestran funciones con diferentes propiedades:



- (a) Explique por qué la gráfica (a) representa una función inyectiva pero no sobreyectiva
 - (b) Explique por qué la gráfica (b) representa una función sobreyectiva pero no inyectiva
 - (c) Modifique cada gráfica para que represente una función biyectiva
9. **Funciones exponenciales y logarítmicas:** Considere las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$.
- (a) Determine el dominio y rango de f y g
 - (b) ¿Son f y g funciones inyectivas? Justifique
 - (c) ¿Son f y g funciones sobreyectivas? Justifique
 - (d) ¿Qué relación existe entre f y g ?
 - (e) ¿Por qué la biyectividad es importante para esta relación?
10. **Funciones trigonométricas:** Para las funciones trigonométricas básicas:
- (a) $f(x) = \sin(x)$, ¿en qué intervalo es biyectiva?
 - (b) $g(x) = \cos(x)$, ¿en qué intervalo es biyectiva?
 - (c) $h(x) = \tan(x)$, ¿en qué intervalo es biyectiva?
 - (d) Para cada función, determine el dominio y codominio apropiados para que sea biyectiva
 - (e) ¿Por qué es necesario restringir el dominio para obtener funciones biyectivas?
11. **Funciones con valor absoluto:** Considere la función $f(x) = |x - 2| + 1$.
- (a) Grafique la función $f(x)$
 - (b) Determine el dominio y rango de f
 - (c) ¿Es f una función inyectiva? Explique por qué
 - (d) ¿Es f una función sobreyectiva si el codominio es $[1, \infty)$?
 - (e) ¿Cómo restringiría el dominio para que f sea biyectiva?
12. **Dominio y codominio críticos:** Para la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$:
- (a) Determine el dominio y rango de f
 - (b) ¿Es f inyectiva? Justifique
 - (c) ¿Es f sobreyectiva si el codominio es $\mathbb{R}$? ¿Y si el codominio es $(0, 1]$?
 - (d) ¿Puede hacer que f sea biyectiva cambiando el codominio?
 - (e) ¿Es posible hacer que f sea biyectiva cambiando solo el dominio?
13. **Funciones en diferentes representaciones:** Se tiene la siguiente tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

- (a) ¿Esta tabla representa una función? Justifique
- (b) ¿Es la función inyectiva? Explique por qué
- (c) ¿Es la función sobreyectiva si el codominio es $\mathbb{R}$?
- (d) Proponga una fórmula algebraica que podría generar estos valores
- (e) ¿Qué dominio y codominio harían a esta función biyectiva?

14. **Problema de aplicación:** Un fabricante produce cajas metálicas sin tapa a partir de láminas cuadradas de 20 cm de lado, cortando cuadrados de x cm en cada esquina y doblando los lados.

- (a) Encuentre una función $V(x)$ que represente el volumen de la caja
- (b) Determine el dominio físico de $V(x)$
- (c) ¿Es $V(x)$ una función inyectiva en su dominio físico?
- (d) ¿Es $V(x)$ una función sobreyectiva? ¿Cuál sería el codominio apropiado?
- (e) ¿Cómo modificaría el dominio para que $V(x)$ sea biyectiva?

15. **Funciones en conjuntos finitos:** Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$.

- (a) Dé un ejemplo de una función $f : A \rightarrow B$ que sea inyectiva pero no sobreyectiva
- (b) Dé un ejemplo de una función $g : A \rightarrow B$ que no sea inyectiva ni sobreyectiva
- (c) ¿Es posible tener una función $h : A \rightarrow B$ que sea sobreyectiva? Justifique
- (d) Si $C = \{a, b, c, d\}$, ¿cuántas funciones biyectivas existen de A a C ?
- (e) Si $f : A \rightarrow B$ es inyectiva, ¿qué se puede decir sobre $|f(A)|$?

16. **Propiedades avanzadas:** Responda las siguientes preguntas teóricas:

- (a) Si $f : A \rightarrow B$ es inyectiva y B es finito, ¿qué se puede decir sobre A ?
- (b) Si $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva y A es finito, ¿qué se puede decir sobre B ?
- (c) Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva y A es finito, ¿qué relación existe entre $|A|$ y $|B|$?
- (d) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y inyectiva, ¿qué se puede concluir sobre su monotonicidad?
- (e) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y sobreyectiva, ¿debe ser inyectiva? Dé un ejemplo o contraejemplo.