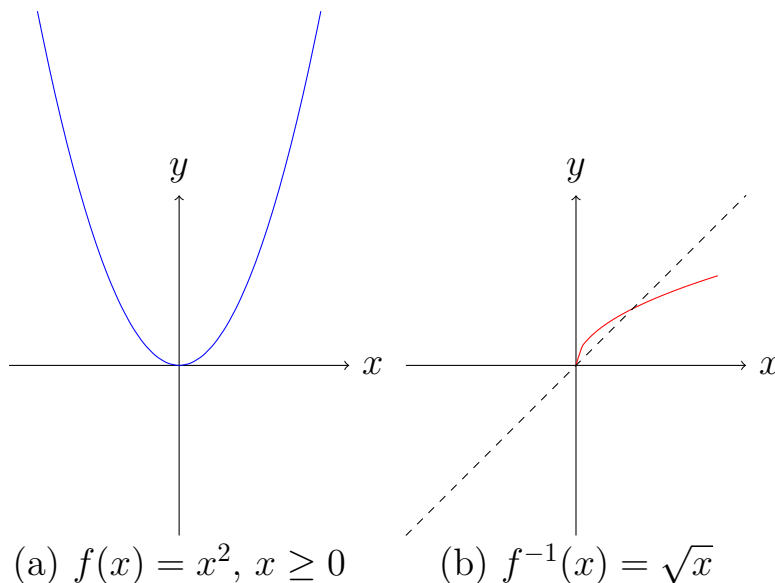


Taller 4: ejercicios sobre Composición de Funciones, Función Inversa y Funciones Trigonométricas Inversas

- Composición básica:** Dadas las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$:
 - Encuentre $(f \circ g)(x)$
 - Encuentre $(g \circ f)(x)$
 - Calcule $(f \circ g)(2)$ y $(g \circ f)(2)$
 - ¿Son iguales $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Explique por qué
- Determinación de inversas:** Demuestre que las funciones $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = \frac{x + 5}{3}$ son inversas entre sí.
 - Calcule $(f \circ g)(x)$
 - Calcule $(g \circ f)(x)$
 - ¿Qué debe cumplirse para que dos funciones sean inversas?
 - Grafique ambas funciones junto con la recta $y = x$ en el mismo sistema de coordenadas
- Funciones trigonométricas inversas:** Para la función $f(x) = \sin^{-1}(x)$:
 - Determine el dominio y rango
 - Grafique la función
 - Calcule $\sin(\sin^{-1}(0.5))$ y $\sin^{-1}(\sin(\pi/3))$
 - ¿Por qué $\sin^{-1}(\sin(5\pi/6)) \neq 5\pi/6$?
- Cálculo de funciones inversas:** Encuentre la función inversa de $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$, $x \neq 3$.
 - Siga el procedimiento estándar: intercambie x e y y resuelva para y
 - Determine el dominio y rango de f y f^{-1}
 - Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
 - ¿Qué relación observa entre el dominio de f y el rango de f^{-1} ?

5. **Gráficas de funciones inversas:** Las siguientes gráficas muestran una función y su inversa:



- (a) ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y f^{-1} con respecto a la recta $y = x$?
- (b) ¿Por qué se restringe el dominio de $f(x) = x^2$ a $x \geq 0$?
- (c) Si f tiene una asíntota vertical, ¿qué tipo de asíntota tiene f^{-1} ?
6. **Composición con funciones trigonométricas:** Dadas las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2 + 1$:
- (a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y su dominio
- (b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y su dominio
- (c) ¿Es $(f \circ g)(x)$ periódica? Explique
- (d) ¿Cuál es el rango de $(g \circ f)(x)$?
7. **Funciones trigonométricas inversas compuestas:** Simplifique las siguientes expresiones:
- (a) $\cos(\sin^{-1}(x))$, para $-1 \leq x \leq 1$
- (b) $\tan(\cos^{-1}(x))$, para $-1 \leq x \leq 1$
- (c) $\sin(2 \cos^{-1}(x))$, para $-1 \leq x \leq 1$
- (d) $\cos(\tan^{-1}(x))$, para $x \in \mathbb{R}$
8. **Propiedades de las funciones inversas:** Demuestre las siguientes identidades:
- (a) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$, para $-1 \leq x \leq 1$
- (b) $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, para $x > 0$

- (c) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$
- (d) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

9. **Resolución de ecuaciones:** Resuelva las siguientes ecuaciones:

- (a) $\sin^{-1}(x) = \frac{\pi}{3}$
- (b) $\cos^{-1}(2x - 1) = \frac{\pi}{4}$
- (c) $\tan^{-1}(x^2 - 1) = \frac{\pi}{4}$
- (d) $2\sin^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$

10. **Funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Grafique la función $f(x)$
- (b) ¿Es f una función inyectiva? Justifique
- (c) Si f es inyectiva, encuentre $f^{-1}(x)$
- (d) Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ para algunos valores

11. **Composición de funciones inversas:** Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$:

- (a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y su dominio
- (b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y su dominio
- (c) ¿Qué relación observa entre f y g ?
- (d) Repita los incisos (a) y (b) para $f(x) = \sin(x)$ (con dominio restringido) y $g(x) = \sin^{-1}(x)$

12. **Derivadas de funciones inversas:** Si $f(x) = x^3 + 2x + 1$:

- (a) Demuestre que f es inyectiva
- (b) Sea $g = f^{-1}$. Encuentre $g(4)$ (sugerencia: encuentre a tal que $f(a) = 4$)
- (c) Use la fórmula $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ para encontrar $g'(4)$
- (d) Verifique su resultado calculando explícitamente $g(x)$ y derivando

13. **Funciones trigonométricas inversas avanzadas:** Para la función $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{x})$:

- (a) Determine el dominio y rango

- (b) Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$
 - (c) Verifique que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$
 - (d) Grafique f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas
14. **Análisis de dominio:** Para las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$:
- (a) Determine el dominio de f y g
 - (b) Determine el dominio de $(f \circ g)(x)$
 - (c) Determine el dominio de $(g \circ f)(x)$
 - (d) ¿Por qué el dominio de $(f \circ g)(x)$ no es simplemente la intersección de los dominios de f y g ?
15. **Funciones trigonométricas inversas en contextos aplicados:** Un faro está situado a 1 km de la costa recta. El haz de luz gira a una velocidad angular constante de 3 radianes por minuto.
- (a) Expresé la distancia d a lo largo de la costa desde el punto más cercano al faro hasta el punto donde el haz toca la costa, como función del ángulo θ
 - (b) Expresé θ como función de d
 - (c) Si t es el tiempo en minutos, exprese θ como función de t
 - (d) Encuentre una función que exprese d como función de t
16. **Demostración de biyección:** Demuestre que la función $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, con $x \in (-1, 1)$, es biyectiva.
- (a) Demuestre que f es inyectiva
 - (b) Demuestre que f es sobreyectiva hacia su rango
 - (c) Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$
 - (d) Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$
17. **Composición y periodicidad:** Sea $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = 2x + \pi$.
- (a) Encuentre $(f \circ g)(x)$ y determine su periodo
 - (b) Encuentre $(g \circ f)(x)$ y determine si es periódica
 - (c) Si $h(x) = \sin(x)$, ¿cuál es el periodo de $(f \circ h)(x)$?
 - (d) En general, si f es periódica con periodo p y g es lineal, ¿es $(f \circ g)(x)$ periódica?
18. **Identidades trigonométricas:** Demuestre que:
- (a) $\sin(2\sin^{-1}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$, para $|x| \leq 1$

- (b) $\cos(2 \cos^{-1}(x)) = 2x^2 - 1$, para $|x| \leq 1$
- (c) $\tan(2 \tan^{-1}(x)) = \frac{2x}{1 - x^2}$, para $|x| < 1$
- (d) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$, para $|x| \leq 1$

19. **Función inversa paramétrica:** Considere la función $f(x) = x^3 + x$.

- (a) Demuestre que f es inyectiva
- (b) En lugar de encontrar $f^{-1}(x)$ algebraicamente, represente f^{-1} paramétricamente
- (c) Use el método paramétrico para graficar f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas
- (d) ¿Cómo se relaciona este método con la propiedad de que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a $y = x$?

20. **Problema de aplicación:** La intensidad I de la luz a una profundidad de d metros en el océano está dada por $I = I_0 e^{-kd}$, donde I_0 es la intensidad en la superficie y k es una constante positiva.

- (a) Resuelva la ecuación para d en términos de I e I_0
- (b) La función resultante es la inversa de la función original. ¿Cuál es su interpretación física?
- (c) Si $k = 0.4$, ¿a qué profundidad la intensidad es el 1% de la intensidad en la superficie?
- (d) Exprese la profundidad como función de la intensidad relativa $r = I/I_0$