

Taller 5: ejercicios sobre Límite de Funciones por la Definición

1. **Definición formal básica:** Demuestre formalmente, usando la definición épsilon-delta, que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$$

- (a) Determine una expresión para δ en términos de ε
 - (b) Complete la demostración formal
 - (c) Ilustre gráficamente la relación entre ε y δ para $\varepsilon = 0.5$
2. **Límite de función cuadrática:** Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) = 7$$

- (a) Encuentre una expresión adecuada para δ en términos de ε
 - (b) Tenga en cuenta que necesitará restringir δ para acotar $|x + 3|$
 - (c) Complete la demostración formal
 - (d) ¿Por qué es necesario restringir δ en este caso pero no en el ejercicio 1?
3. **Límite de función racional:** Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x + 1} = 1$$

- (a) Encuentre una expresión para δ en términos de ε
 - (b) Tenga en cuenta las restricciones necesarias para evitar que el denominador sea cero
 - (c) Complete la demostración formal
 - (d) Verifique su resultado con $\varepsilon = 0.1$ encontrando un valor específico de δ
4. **Límite de función trigonométrica:** Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$$

- (a) Use la desigualdad $|\sin(x)| \leq |x|$ para $x \in \mathbb{R}$
- (b) Encuentre una expresión para δ en términos de ε
- (c) Complete la demostración formal

(d) ¿Cómo modificaría la demostración para probar que $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x) = 0$?

5. **No existencia de límite:** Demuestre que no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Grafique la función e ilustre por qué no tiene límite en $x = 0$

(b) ¿Esta función tiene límites laterales en $x = 0$?

6. **Límite en el infinito:** Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = 2$$

(a) Recuerde que para límites en infinito, la definición es: para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

(b) Encuentre una expresión para N en términos de ε

(c) Complete la demostración formal

(d) Compare esta definición con la definición estándar de límite