

Taller 6: ejercicios sobre Propiedades de los Límites y Unicidad del Límite

1. **Propiedades básicas:** Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$, calcule:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} [2f(x) + 3g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]^2 - [g(x)]^2$

2. **Límites de funciones polinómicas:** Calcule los siguientes límites usando las propiedades de los límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 1)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 4x + 3)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (5x^4 - 2x^2 + 7)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

3. **Límites de funciones racionales:** Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

4. **Límites de funciones trigonométricas:** Use los límites trigonométricos fundamentales para calcular:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(5x)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos(x)}{x}$$

5. **Propiedad de composición:** Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ y $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L$ (bajo ciertas condiciones).

$$(a) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 2} \sin(x^2 - 3)$$

$$(b) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos(x)}$$

$$(c) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)$$

(d) ¿Por qué es necesario que f sea continua en b para que esta propiedad se cumpla?

6. **Propiedades de límites y desigualdades:** Demuestre que si $f(x) \leq g(x)$ para todo x cerca de a (excepto posiblemente en a), y si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

(a) Use la definición épsilon-delta

(b) Proporcione un ejemplo donde $f(x) < g(x)$ pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

7. **Límites de funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$(a) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$(b) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

(c) ¿Cómo se aplican las propiedades de los límites a funciones definidas por partes?

8. **Propiedades de límites y valores absolutos:** Demuestre que:

$$(a) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

$$(b) \text{ Si } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

(c) Proporcione un ejemplo donde $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ existe pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe

(d) ¿Cómo se relaciona esto con la unicidad del límite?

9. **Límites y funciones inversas:** Si f es continua y tiene una inversa f^{-1} , y si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, entonces $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = a$.

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x)$ usando el límite conocido $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1}(x)$ usando el límite conocido $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$
- (c) ¿Cómo se relaciona este resultado con la unicidad del límite?

10. **Propiedades y no existencia de límites:** Demuestre que no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

- (a) Calcule los límites laterales
- (b) Use la propiedad de unicidad del límite para justificar por qué el límite no existe
- (c) Grafique la función e ilustre por qué el límite no existe
- (d) ¿Cómo se relaciona esto con la definición formal de límite?

11. **Aplicación en física:** La velocidad instantánea $v(t)$ de un objeto en movimiento es el límite de la velocidad promedio:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

donde $s(t)$ es la posición en el tiempo t .

- (a) Si $s(t) = t^2 + 2t$, calcule $v(3)$ usando la definición
- (b) Use las propiedades de los límites para simplificar el cálculo
- (c) ¿Cómo se relaciona la unicidad del límite con la definición de velocidad instantánea?
- (d) Si hubiera dos valores diferentes para $v(t)$, ¿qué implicaciones físicas tendría?