

Taller 7: ejercicios sobre Límites Laterales de Funciones

1. **Definición básica:** Calcule los límites laterales para la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|$

(c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$? Justifique su respuesta

(d) Grafique la función e identifique los límites laterales

2. **Límites laterales de funciones lineales:** Calcule los límites laterales para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Explique por qué

(d) ¿Cómo se relaciona esto con la continuidad de f en $x = 2$?

3. **Límites laterales de funciones racionales:** Calcule los límites laterales para la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ en $x = 3$.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$

(c) Explique por qué ocurren estos resultados

(d) Grafique la función e identifique las asíntotas verticales

4. **Funciones con valor absoluto:** Calcule los límites laterales para la función $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ en $x = 2$.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

(c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$? Justifique

(d) Simplifique la función para $x < 2$ y para $x > 2$

5. **Límites laterales y continuidad:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(c) ¿Es f continua en $x = 1$? Justifique

(d) ¿Cómo modificaría la función para que sea continua en $x = 1$?

6. **Límites laterales de funciones trigonométricas:** Calcule los límites laterales para la función $f(x) = \tan(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan(x)$

(c) Explique por qué los límites laterales son diferentes

(d) Grafique la función en el intervalo $(0, \pi)$

7. **Límites laterales y definición formal:** Demuestre formalmente que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

(a) Use la definición de límite por la derecha

(b) Encuentre una expresión para δ en términos de ε

(c) Complete la demostración formal

(d) ¿Por qué no existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$?

8. **Propiedades de los límites laterales:** Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = M_1$, demuestre que:

(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) + g(x)] = L_1 + M_1$

(b) $\lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot M_1$

(c) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{M_1}$ si $M_1 \neq 0$

(d) ¿Cómo se adaptarían estas propiedades para límites por la derecha?

9. **Límites laterales de funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- (c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Justifique
- (d) ¿Cómo se relaciona esto con la continuidad de f en $x = 2$?

10. **Límites laterales y asíntotas verticales:** Para la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$:

- (a) Encuentre los valores de x donde $f(x)$ tiene asíntotas verticales
- (b) Calcule los límites laterales en cada asíntota vertical
- (c) Describa el comportamiento de la función cerca de cada asíntota
- (d) Grafique la función e identifique las asíntotas

11. **Límites laterales de funciones logarítmicas:** Calcule los límites laterales para las siguientes funciones:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_2(1 - x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x - 3)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{1/2}(x)$

12. **Límites laterales y función signo:** Para la función $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$:

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x)$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x)$
- (c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x)$? Justifique
- (d) Grafique la función e identifique los límites laterales

13. **Límites laterales en funciones con raíces pares:** Calcule los límites laterales para la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2}$

- (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2}$
- (c) ¿Existen los límites laterales en $x = 2^+$ y $x = -2^-$? Explique
- (d) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$?
14. **Límites laterales y funciones trigonométricas inversas:** Calcule los límites laterales para las siguientes funciones:
- (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^{-1}(x)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \cos^{-1}(x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(x)$
15. **Límites laterales y composición de funciones:** Si $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = b$ y $\lim_{y \rightarrow b^+} f(y) = L$, ¿cuándo se cumple que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = L$?
- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$
- (c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x - 1)$
- (d) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x - 2}$
16. **Límites laterales y función parte entera:** Para la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (función parte entera o piso):
- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor$
- (c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x \rfloor$? Justifique
17. **Problema de aplicación:** La intensidad I de la luz a una profundidad de d metros en el océano está dada por $I = I_0 e^{-kd}$, donde I_0 es la intensidad en la superficie y k es una constante positiva.
- (a) Calcule $\lim_{d \rightarrow 0^+} I(d)$ y explique su significado físico
- (b) Calcule $\lim_{d \rightarrow \infty} I(d)$ y explique su significado físico
- (c) Si $k = 0.4$, ¿cuál es la intensidad relativa I/I_0 a 1 metro de profundidad?
- (d) ¿Cómo se relacionan los límites laterales con el comportamiento físico de la luz en el agua?