

Taller 8: ejercicios sobre el Teorema del Emparedado

1. **Límite fundamental:** Use el teorema del emparedado para demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- (a) Comience con la desigualdad $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ para $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$
- (b) Demuestre las desigualdades geoméricamente usando áreas de sectores y triángulos
- (c) Aplique el teorema del emparedado para concluir el resultado
- (d) ¿Por qué es importante este límite en el cálculo de derivadas trigonométricas?

2. **Límites trigonométricos:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \left(\frac{1}{x} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \left(\frac{1}{x^2} \right)$

3. **Límites con funciones oscilatorias:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{-1/x^2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x}$

4. **Límites unilaterales:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \left(\frac{1}{x} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \sin \left(\frac{1}{\pi - x} \right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cos \left(\frac{1}{x - 1} \right)$

5. **Límites en el infinito:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \cos x}{3x - \sin x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin^2 x}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 \sin x}{x^2 + 1}$

6. **Límites con funciones racionales:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x \sin x}{x^2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x) - 2x^2}{x^2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + \sin x}{3x^2 - \cos x}$

7. **Límites trigonométricos avanzados:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ (donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera)
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

8. **Funciones definidas por partes:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Use el teorema del emparedado para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- (b) ¿Es f continua en $x = 0$? Justifique
- (c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$

9. **Límites con valor absoluto:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right|$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right|$

10. **Límites con funciones exponenciales:** Use el teorema del emparedado para calcular:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\sin(1/x)}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + \cos x}{2^x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x}$$

11. **Desigualdades y el teorema del emparedado:** Para cada función, encuentre dos funciones que la "aprieten" y use el teorema del emparedado:

$$(a) f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \text{ cerca de } x = 0$$

$$(b) g(x) = \frac{x + \sin x}{x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty$$

$$(c) h(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ cerca de } x = 0^+$$

$$(d) k(x) = \frac{x^2 - 2 + \cos x}{x^2} \text{ cerca de } x = 0$$

12. **Límites con funciones hiperbólicas:** Las siguientes se les llama funciones hiperbólicas:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Use el teorema del emparedado para calcular:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{e^x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \tanh\left(\frac{1}{x}\right)$$

13. **Propiedades avanzadas:** Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ y $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ cerca de a , entonces:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

$$(b) \text{ Si } L = 0, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = 0 \text{ para cualquier } n > 0$$

$$(c) \text{ Si } L > 0, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ para } n \text{ impar}$$

$$(d) \text{ ¿Cómo se relacionan estas propiedades con el teorema del emparedado?}$$

14. **Aplicación en física:** La posición de una partícula vibrante está dada por $s(t) = t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ para $t \neq 0$, y $s(0) = 0$.

$$(a) \text{ Use el teorema del emparedado para demostrar que } \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$$

$$(b) \text{ Describa el movimiento de la partícula cerca de } t = 0$$