

Taller 9: ejercicios sobre Límites Infinitos y al Infinito

1. **Límites al infinito para funciones polinómicas:** Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 1)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 5)$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^4 + 2x^2 - 3)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^5 - 3x^3 + 2x)$

2. **Límites infinitos (asíntotas verticales):** Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 1}{x - 3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{x - 3}$

3. **Modelos de comportamiento final se refiere a las asíntotas horizontal u oblicuas**

Para cada función racional, encuentre su modelo de comportamiento final:

(a) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5x - 3}$

(b) $g(x) = \frac{x^3 + 2x}{4x^3 - x^2 + 7}$

(c) $h(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 + 5x}$

(d) $k(x) = \frac{5x + 2}{3x^2 - x + 4}$

4. **Límites al infinito para funciones racionales:** Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{5x^3 + 4x - 2}$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

5. **Límites infinitos con funciones trigonométricas:** Calcule los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot(x)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \csc(x)$$

6. **Límites al infinito con funciones trigonométricas:** Calcule los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos x}{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin^2 x}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 \sin x}{x^2 + 1}$$

7. **Límites infinitos con funciones racionales:** Para cada función, encuentre todas las asíntotas verticales y calcule los límites infinitos correspondientes:

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

$$(b) g(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$$

$$(c) h(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x}$$

$$(d) k(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

8. **Límites al infinito con funciones radicales:** Calcule los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - |x|)$$

9. **Límites al infinito con funciones exponenciales:** Calcule los siguientes límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x - 2^x}$

10. **Límites al infinito con funciones logarítmicas:** Calcule los siguientes límites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

11. **Comparación de tasas de crecimiento:** Ordene las siguientes funciones de menor a mayor según su tasa de crecimiento cuando $x \rightarrow \infty$:

- (a) $f(x) = \ln x$
- (b) $g(x) = x^{1/2}$
- (c) $h(x) = x$
- (d) $k(x) = x^2$
- (e) $m(x) = e^x$

12. **Límites infinitos:** Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \text{indefinido} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- (c) Grafique la función e identifique las asíntotas

13. **Límites al infinito y asíntotas horizontales:** Para cada función, encuentre todas las asíntotas horizontales:

- (a) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5x - 3}$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad g(x) &= \frac{x^3 + 2x}{4x^3 - x^2 + 7} \\ \text{(c)} \quad h(x) &= \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^3 + 5x} \\ \text{(d)} \quad k(x) &= \frac{5x + 2}{3x^2 - x + 4} \end{aligned}$$

14. **Límites infinitos y asíntotas oblicuas:** Para cada función, determine si tiene una asíntota oblicua y, de ser así, encuentre su ecuación:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1} \\ \text{(b)} \quad g(x) &= \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 3x + 2} \\ \text{(c)} \quad h(x) &= \frac{3x^2 + 4x - 2}{2x + 1} \\ \text{(d)} \quad k(x) &= \frac{4x^3 - x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 1} \end{aligned}$$

15. **Límites infinitos en contextos aplicados:** La intensidad I de la luz a una profundidad de d metros en el océano está dada por $I = I_0 e^{-kd}$, donde I_0 es la intensidad en la superficie y k es una constante positiva.

- (a) Calcule $\lim_{d \rightarrow \infty} I(d)$ y explique su significado físico
- (b) Si $k = 0.4$, ¿cuál es la intensidad relativa I/I_0 a 5 metros de profundidad?
- (c) ¿A qué profundidad la intensidad es el 1% de la intensidad en la superficie?
- (d) ¿Cómo se relacionan los límites al infinito con el comportamiento físico de la luz en el agua?

16. **Límites infinitos en funciones trigonométricas inversas:** Calcule los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(x) \\ \text{(b)} \quad &\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(x) \\ \text{(c)} \quad &\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^{-1}(x) \\ \text{(d)} \quad &\lim_{x \rightarrow -1^+} \cos^{-1}(x) \end{aligned}$$

17. **Problema teórico avanzado:** Demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

- (a) Tome el logaritmo natural de ambos lados
- (b) Use este resultado para calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$